PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET-PODGORICA

Popravni završnog ispita iz Linearne algebre

Jul, 2020

Zadaci:

1. a) Linearan operator $f: R^3 \to R^3$ definisan je sa $f(x) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$, gdje je $\vec{a} = \vec{\imath} - 2\vec{k}$.
Naći matricu operatora u bazi $\{(1,0,1), (0,2,3), (2,3,4)\}$.
b) Dokazati da je operator L linearan, a zatim naći njegovo jezgro i sliku.

$$L: M_2(R) \to M_2(R), L(A) = 2A - A^T$$

2. Naći rastojanje polinoma $g(t) \in P_{\leq n}$ od potprostora $L = \{f(t) \in P_{\leq n}: 2f(0) - 3f(1) = 0\}$. Skalarni proizvod je definisan na standardni način.

3. Dokazati da je operator:

$$A(x, y, z) = (2x + 2y + 2z, 2x - y - 4z, 2x - 4y - z)$$

simetričan, a zatim naći ortonormiranu bazu u kojoj je matrica operatora dijagonalna.

Teorija:

1. a) Definicija karakterističnog polinoma i sopstvene vrijednosti linearnog operatora.
b)Broj $\lambda_0 \in C$ je sopstvena vrijednost linearnog operatora $A: V \to V$ ako i samo ako postoji nenulti vektor $x_0 \in V$ takav da je $Ax_0 = \lambda_0 x_0$. Dokazati.

2. a)Ako je potprostor L Euklidskog prostora E invarijantan u odnosu na operator A,onda je ortogonalni komplement $L^{\perp}$ invarijantan u odnosu na konjugovani operator A^*.

b)Ako je $A: E \to E$ simetrični operator, tada postoji ortonormirana baza prostora E sastavljena od soptvenih vektora operatora A.